Economía en T períodos:

$$U(c_1^i, \dots, c_T^i) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u_i(c_t^i)$$

$\beta \in (0,1) \longrightarrow$ factor de descuento.

$\beta = \frac{1}{1+\rho}$, $\rho > 0$, ρ : tasa de descuento.

impaciencia del consumidor.

Si ρ es más alto $\Rightarrow$ β es más pequeño $\Rightarrow$ el individuo es más impaciente.

tasa de interes: r $\rightarrow$ impaciencia del mercado.

Problema del consumidor:

$$\max_{c_1,\dots,c_T,\, b_1,\dots,b_T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) \quad \text{s.a.}$$

$$c_1 + b_1 = y_1 + (1+r_0)\, b_0$$ parámetro del model

$$c_2 + b_2 = y_2 + (1+r_1)\, b_1$$

$$\vdots$$

$$c_T + b_T = y_T + (1+r_{T-1})\, b_{T-1}$$

① $b_T \geq 0$ para que el individuo no muera con deudas.

② En óptimo $b_T = 0$.

Para simplificar el problema, podemos construir una restricción presupuestal intertemporal:

$t = T$: $c_T + b_T = y_T + (1+r_{T-1})\, b_{T-1}$ despejar b_{T-1} y reemplazar.

$t = T-1$: $c_{T-1} + b_{T-1} = y_{T-1} + (1+r_{T-2})\, b_{T-2}$ despejar b_{T-2} y reemplazar

$t = T-2$: $c_{T-2} + b_{T-2} = y_{T-2} + (1+r_{T-3})\, b_{T-3}$

$\vdots$

$$c_1 + \frac{1}{1+r_1} c_2 + \dots + \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} c_T + \cancelto{0}{\frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})}}$$

$$= y_1 + \frac{1}{1+r_1} y_2 + \dots + \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} y_T$$

$$p_t := \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$ $\longrightarrow$ precio de consumo en t en términos de consumo en 1.

Si individuo ahorra 1 unidad hoy y "reahorra" cada periodo esa unidad más intereses que le genera hasta t:

En 1: $b_1 = 1$

En 2: Individuo recibe $(1+r_1)b_1 = (1+r_1)$. $b_2 = (1+r_1)$

En 3: Individuo recibe $(1+r_2)\cdot b_2 = (1+r_1)\cdot(1+r_2)$.

$\vdots$

En t: Individuo recibe $(1+r_{t-1})b_{t-1} = (1+r_{t-1})(1+r_{t-2})\cdots(1+r_1)$

Es decir, si el individuo renuncia a 1 unidad de consumo en $t=1$, eso representa $(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})$ unidades de consumo en el periodo t.

Si el individuo renuncia a una unidad de consumo en t, eso significa que puede consumir $\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$ unidades de consumo en $t=1$.

Es decir $\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$ es el precio de mercado del consumo en el periodo t en términos de consumo en $t=1$.

r es impaciencia del mercado.

Problema del consumidor:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^{T} p_t c_t = \sum_{t=1}^{T} p_t y_t$$

Cobb-Douglas: $$c_t^*(r_1, \dots, r_{t-1}) = \frac{\beta^{t-1}(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})}{1+\beta+\dots+\beta^{T-1}} \left(\sum_{t=1}^{T} p_t y_t\right)$$

Equilibrio: • I individuos.

Un equilibrio son tasas de interés $(r_1, \dots, r_{T-1})$ y consumos $c_1^i, \dots, c_T^i$ tal que:

① c_t^i es óptimo dadas $(r_1, \dots, r_{T-1})$:

$$c_t^i = c_t^i(r_1, \dots, r_{t-1})$$

② Mercados se vacían: $$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I} c_1^{i*}(r_1, \dots, r_{T-1}) &= \sum_{i=1}^{I} y_1^i \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{I} c_T^{i*}(r_1, \dots, r_{T-1}) &= \sum_{i=1}^{I} y_T^i \end{aligned}\right\} \text{T eqs con T-1 incógnitas.}$$

↳ De aquí se resuelve para encontrar $r_1, \dots, r_{T-1}$.

Consumo depende potencialmente de <u>todas</u> las tasas de interés.

Es un problema complejo de resolver en general.

Supongamos que utilidad $u_i(c_t^i) = \ln c_t^i$ y estamos en el caso de un agente representativo (es decir, los I individuos son idénticos):

Condición de eficiencia: $u'(c_t^i) = \beta(1+r_t)u'(c_{t+1}^i)$

$$\Rightarrow 1+r_t = \frac{c_{t+1}}{\beta c_t}$$

En economía de agente representativo: $c_t^{i*} = y_t^i$

$$\Rightarrow \boxed{1+r_t^* = \frac{y_{t+1}}{\beta y_t} = (1+\rho)\frac{y_{t+1}}{y_t}}$$

→ tasa de interés de equilibrio.

Con cobb-Douglas es igual a CES con $\sigma = 1$.

Con utilidad CES:

$$1+r_t^* = (1+\rho)\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{y_{t+1}-y_t}{y_t}$$ → crecimiento de la dotación.

$$= \frac{y_{t+1}}{y_t} - 1 \quad \Rightarrow \quad 1+\hat{y}_{t+1} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

$$(1+r_t^*) = (1+\rho)\cdot(1+\hat{y}_{t+1})^{\frac{1}{\sigma}}$$

Si x es pequeño: $\log(1+x) \approx x$

$$\log(1+r_t^*) = \log(1+\rho) + \frac{1}{\sigma}\log(1+\hat{y}_{t+1})$$

$$r_t^* \approx \rho + \frac{\hat{y}_{t+1}}{\sigma}$$

Si las dotaciones <u>no crecen</u> $(\hat{y}_{t+1} = 0) \Rightarrow r_t^* = \rho$

Si $\hat{y}_{t+1} > 0 \Rightarrow r_t^* > \rho$

Si σ es muy pequeño elasticidad de sustitución intertemporal es muy grande. ⇒ cambios en dotaciones van a generar cambios grandes en ahorro/endeudamiento ⇒ tasa de interés de equilibrio debe cambiar más.

Choques:

- Choque transitorio al ingreso ocurre cuando solamente el ingreso de un periodo cambia: $\Delta y_\tau > 0$, $\Delta y_t = 0$ $t \neq \tau$
- Choque permanente ocurre cuando $\Delta y_t > 0 \ \forall t$.

Choque transitorio:

Supongamos que y_t aumenta en un periodo $t > 2$.

$$1 + r_t^* = (1+\rho)\frac{y_{t+1}}{y_t \uparrow} \downarrow \qquad 1 + r_{t-1}^* = (1+\rho)\frac{y_t \uparrow}{y_{t-1}} \uparrow$$

Es decir, $\uparrow y_t \Rightarrow \boxed{\downarrow r_t^*}, \boxed{\uparrow r_{t-1}^*}$. $c_t = y_t \ \forall t$.

$$P_t = \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})\uparrow} \downarrow$$

→ el precio del bien en t disminuye porque es más abundante en términos relativos.

$$P_{t+1} = \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1}\uparrow)(1+r_t)\downarrow}$$

→ P_{t+1} permanece constante.

Resumen: choque transitorio en y_t solamente afecta r_t^*, r_{t-1}^*, aumenta el consumo c_t pero no modifica c_τ, $\tau \neq t$.

Choque permanente: supongamos que y_t aumenta en la misma proporción para todo t: $y_t' = k y_t$.

$$(1 + r_t'^*) = (1+\rho)\frac{\cancel{k} y_{t+1}}{\cancel{k} y_t} = (1+\rho)\frac{y_{t+1}}{y_t} = 1 + r_t^*$$

$\Rightarrow$ tasas de interés no van a cambiar.

Horizonte infinito:

- Individuos viven infinitos periodos.
- Dotaciones: $(y_1^i, y_2^i, \dots)$, $y_t^i \geq 0$
- $p_1 = 1$, $p_t = \dfrac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$
- Riqueza: $\sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i$ — para problema bien definido, necesitamos que riqueza sea finita.

  Con función de utilidad CES, precios de equilibrio van a asegurar que riqueza sea finita.

- Preferencias: $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u_i(c_t^i)$
- Restricción presupuestal: $c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1})\, b_{t-1}^i$
- En caso de tiempo finito, imponíamos $b_T \geq 0$.
- Aquí no hay periodo terminal!

Esquemas de Ponzi:

Individuo consume en cada periodo exactamente su dotación. Sin embargo, en el periodo $t=1$ se endeuda en una cantidad x y hace roll-over de la deuda en cada periodo:

- $b_1 = -x$.
  - En $t=2$ debe pagar $(1+r_1)x \Rightarrow$ pide prestado $b_2 = -(1+r_1)x$
  - En $t=3$: debe pagar $(1+r_1)(1+r_2)x \Rightarrow$ pide:

$$b_3 = -(1+r_1)(1+r_2)\,x.$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow$ deuda crece hasta el infinito.

Claramente $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ satisfacen las restricciones presupuestales del individuo.

En óptimo, individuo va a escoger $\underline{x \to \infty}$.

$\Rightarrow$ Para que el problema del hogar esté bien definido, debemos imponer restricción que prevenga este tipo de esquemas.

Restricción intertemporal hasta periodo T:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} + \lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

Queremos:
$$\underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}}_{\text{Consumo total en VP}} \leq \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}}_{\text{Riqueza.}}$$

$\Rightarrow$ Debemos imponer: $\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \geq 0}$

$\hookrightarrow$ Restricción de no Ponzi

OJO: esto no significa que individuo no pueda endeudarse todos los periodos. Ej: $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, ...

$$\lim_{T\to\infty} \frac{-1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = 0$$

Si el problema que resolvemos es:

- $\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t^i)$ s.a. $\underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i \leq \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i}$ ✻

  Con esta restricción ya estamos asumiendo que condición de no ponzi se cumple.

También podríamos resolver:

- $\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t^i)$ s.a. $c_t + b_t = y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} \quad \forall t.$

  ✻ $\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = 0$ ✻

Resolvamos el primer problema:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t^i) + \lambda \left(\sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i - \sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i \right)$$

CPO:

$[c_t]$: $\beta^{t-1} u'(c_t^i) = \lambda p_t$

$$\lambda^* \left[\sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i - \sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i \right] = 0 \longrightarrow \text{condición de holgura KKT.}$$

Si utilidad es creciente $(u' > 0)$, el individuo va a querer consumir lo máximo posible. En el óptimo, nunca va a ocurrir:

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i < \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i$$

En eq: $\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i = \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i$

En eq: $\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^i = \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t^i$

CPO: $\beta^{t-1} u'(c_t) = \lambda p_t \longrightarrow \boxed{u'(c_t^i) = \beta(1+r_t) u'(c_{t+1}^i)}$ (*) condición de Euler. $\forall t$

(*) $\boxed{\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t = \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t}$ — restricción presupuestal intertemporal.

Solución está caracterizada por estas ecuaciones.

Resolviendo la segunda versión del problema:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t^i) + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left(y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i - c_t^i - b_t^i \right)$$

CPO:

$[c_t]$: $\beta^{t-1} u'(c_t) = \lambda_t$

$[b_t]$: $\lambda_{t+1} = (1+r_t)\lambda_t$

(*) $\boxed{u'(c_t) = \beta(1+r_t) u'(c_{t+1})}$ condición de Euler.

$[\lambda_t]$: $\boxed{y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i - c_t^i - b_t^i = 0.}$ (*)

Estas condiciones son necesarias pero <u>NO</u> suficientes para el óptimo.

Ej: Supongamos que $\boxed{y_t^i = 1}$ y $r_t = \rho$.

$$u'(c_t) = \beta(1+r_t)u'(c_{t+1}) = \frac{\cancel{(1+\rho)}}{\cancel{(1+\rho)}} u'(c_{t+1})$$

$$\Rightarrow u'(c_t) = u'(c_{t+1}) \iff \boxed{c_t = c_{t+1}} \quad (*)$$

En el óptimo $\boxed{c_t^* = 1.}$ (*)

Es decir, $\boxed{c_t = 1 - \varepsilon}$ es subóptimo.

Claramente, $c_t = 1 - \varepsilon$ cumple ecuación de Euler.

$$b_1 = y_1 - c_1 = 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon.$$

$$c_2 = 1 - \varepsilon, \quad \Rightarrow b_2 = y_2 + (1+r_1)b_1 - c_2$$

$$= 1 + (1+\rho)\varepsilon - (1-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{b_2}{1+\rho} = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\rho}.$$

En $t = 3$: $\displaystyle \frac{b_3}{(1+r_1)(1+r_2)} = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\rho} + \frac{\varepsilon}{(1+\rho)^2}$

$$\vdots$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = \varepsilon \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} = \frac{\varepsilon(1+\rho)}{\rho} > 0$$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} > 0}$$ ⟶ esto está ocurriendo en el papel de consumo subóptimo

Es decir, en la segunda versión del problema del consumidor debemos imponer una condición adicional que nos asegure que estamos llegando a un óptimo.

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = 0}$$ condición de transversalidad.

Condición de no Ponzi:	Condición de transversalidad:
$\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} \geq 0$	$\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = 0$
• se debe agregar para que problema del consumidor esté bien definido. • la deben cumplir <u>todos</u> los perfiles de consumo, no solamente el óptimo.	• Se debe agregar para que, junto con las condiciones de Euler y restricciones presupuestales en cada periodo sean un conjunto de condiciones necesarias + suficientes para un óptimo. • Sólo la debe cumplir el perfil de consumo óptimo.